# Table des matières

Chapitre Deux

# Séries Numériques

## 2.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 2.1.1** *Soit une suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *de nombres réels ou de complexes.*

*a) A cette suite, on associe la suite* $(S_k)_{k\geq 1}$ *( ou* $(S_k)_{k\geq 0}$*) telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad S_k = x_1 + x_2 + ... + x_k \quad (\textit{ou bien} \quad S_k = x_0 + x_1 + ... + x_k)$$

*Le nombre* $S_k$ *est appelé la somme partielle de rang* $k$ *de la série de terme général* $x_k$*.*

*b) On dit que la série de terme général* $x_n$ *converge lorsque* $(S_k)_{k\geq 1}$ *converge. La limite* $S$ *de* $S_k$ *est appelée la somme de la série et on la note* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *; Le nombre* $r_n = S - S_n$ *est appelé le reste de rang* $n$*.*

*c) La série de somme partielle* $S_k$ *diverge lorsqu'elle n'est pas convergente.*

**Proposition 2.1.1 (Critère de Cauchy)**
*La série de terme général* $x_n$ *est convergente si, et seulement si,* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}/N \leq n < m$ *on a*

$$|S_m - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_m| \leq \varepsilon$$

**Preuve**
On utilise le critère de Cauchy pour les suites de réels ou de complexes : une suite converge si, et seulement si, elle est de Cauchy. □

**Remarque 2.1.1** *Si la série de terme général* $x_n$ *converge, alors la suite* $(x_n)_n \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \to +\infty$*.*
*Autrement dit si* $x_n \not\to 0$ *alors* $S_n$ *ne converge pas.*

**Proposition 2.1.2** *Soient* $(x_n)_{n\geq 1}$ *et* $(y_n)_{n\geq 1}$ *deux suites :*

*a) Si ces deux suites prennent la même valeur à partir d'un certain entier* $N$*, alors,* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *converge si, et seulement si,* $\sum_{n\geq 1} y_n$ *converge.*

*b) Si* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *et* $\sum_{n\geq 1} y_n$ *convergent, alors la série de terme général* $\lambda x_n + y_n$ *converge* $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ *(ou* $\mathbb{R}$*) et*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n + y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

## 2.2 Séries à termes réels positifs

Nous rasemblons dans ce théorème ci-dessous quelques propriétés importantes de convergence des séries à termes positives.

**Théorème 2.2.1**

*a) Si* $x_n \geq 0, \forall n$, $\sum_{n\geq 0} x_n$ *converge si, et seulement si,* $(S_k)_{k\geq 0}$ *est majorée.*

*b) Soient* $x_n \geq 0$ *et* $y_n \geq 0 \quad \forall n$ *et*

*b-1) Si* $\forall n$, $x_n \leq y_n$, *alors* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *converge* $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ *converge.*

*b-2) Si* $x_n \sim y_n$ $(n \to +\infty)$
*Alors,* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *converge* $\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} y_n$ *converge.*

*c) Soit* $f$ *une fonction décroissante de* $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$ *la série de terme général* $x_n = f(n)$ *converge si, et seulement si, l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente.*

*d) Soit* $(x_n)_n$ *une suite de réels* $\geq 0$.

*i) S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que la suite* $(n^\alpha x_n)_n$ *est majorée , alors* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *converge*

*ii) S'il existe* $\alpha \leq 1$ *et* $c > 0$ *tels que la suite* $(n^\alpha x_n)_n$ *est minorée par c, alors* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *diverge.*

**Théorème 2.2.2** *(Règle de Cauchy )*
*Soit* $(x_n)_{n\geq 1}$ *sune suite de réels positifs.*

*a) S'il existe* $a < 1$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tels que* $\forall n \geq N$, *on a*

$$(x_n)^{1/n} \leq a \Rightarrow \sum_{n\geq 0} x_n \quad \textit{converge.}$$

*b) Si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n)^{1/n} > 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} x_n$ *diverge*

*c) Si* $(x_n)^{1/n} = 1$, *on ne peut conclure.*

**Preuve**
Dans l'hypothèse $a$) on a $0 \leq x_n \leq a^n$ pour $n \geq N$ d'où la convergence de la série par comparaison avec le terme général d'une série géométrique de raison $a \in [0, 1[$.
Dans l'hypothèse $b$) la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0. $\Box$.

**Remarque 2.2.1** *La règle de Cauchy peut être formulée en utilisant* $L = \lim_{n \to +\infty} \sup (x_n)^{\frac{1}{n}}$.
- *Si* $L < 1$ *la série de terme général* $x_n$ *est convergente.*
- *Si* $L > 1$ *la série de terme général* $x_n$ *est divergente.*
- *Si* $L = 1$ *il est impossible de conclure.*

**Exemple 2.2.1** *Lorsque* $x_n = \dfrac{1}{n}$, *la série de terme général* $x_n$ *diverge et on a* $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1$.
*Lorsque* $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, *la série de terme général* $x_n$ *converge et on a* $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = 1$.

**Exemple 2.2.2** *Etudions, en fonction du réel* $x > 0$, *la nature de la série de terme général*

$$x_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} x^n.$$

*On a*

$$(x_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2} x \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} (x_n)^{\frac{1}{n}} = 4x.$$

*Lorsque* $x < \dfrac{1}{4}$ *la série est convergente, lorsque* $x > \dfrac{1}{4}$ *la série est divergente, lorsque* $x = \dfrac{1}{4}$ *on a*

$$x_n = \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{3}{2n+2}\right)^{2n}$$

*donc* $\lim_{n \to +\infty} x_n = e^{-3}$, *et la série est divergente car son terme général ne tend pas vers* 0.

**Théorème 2.2.3 (Règle de d'Alembert )**
*Soit* $(x_n)_n$ *une suite de réels positifs*

*a) s'il existe* $a < 1$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq N$, *on a* $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq a \Rightarrow \displaystyle\sum_{n \geq 0} x_n$ *converge*

*b) s'il existe* $M \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall m \geq M$, *on a* $\frac{x_{m+1}}{x_n} \geq 1$, *alors* $\displaystyle\sum_{n \geq 0} x_n$ *diverge.*

**Preuve**
Dans l'hypothèse $a$) on a, pour chaque entier $n > N$, $0 < x_n \leq a x_{n-1}$ donc $x_n \leq \dfrac{x_N}{a^N} a^n$ ce qui entraine la convergence de la série considérée par comparaison avec une série géométrique dont la raison $a \in ]0, 1[$.
Dans l'hypothèse $b$) la série est divergente car son terme général ne tend pas vers 0. $\Box$.

**Remarque 2.2.2** *Notons* $L = \lim_{n\to+\infty} \sup \frac{x_{n+1}}{x_n}$ *et* $\ell = \lim_{n\to+\infty} \inf \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

— *Lorsque* $L < 1$ *la série est convergente.*
— *Lorsque* $\ell > 1$ *la série est divergente.*
— *Lorsque* $L = \ell = 1$*, c'est à dire lorsque la suite* $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_n$ *tend vers* $1$ *on ne peut conclure comme le montre les deux exemples* $x_n = \frac{1}{n}$ *et* $y_n = \frac{1}{n^2}$.

**Exemple 2.2.3** *Etudions, en fonction du réel* $x > 0$*, la convergence de la série de terme général*

$$x_n = \frac{Log\ n + 1}{\sqrt{n} + Log\ n + 1} x^n.$$

*Nous observons que*

$$\frac{Log\ n + 1}{\sqrt{n} + Log\ n + 1} \sim \frac{Log\ n}{\sqrt{n}} \quad lorsque \quad n \to +\infty.$$

*Introduisons* $y_n = \frac{Log\ n}{\sqrt{n}} x^n$*. Il est évident que* $x_n, y_n \geq 0$ *et que* $x_n \sim y_n$ *quand* $n \to +\infty$*. Nous avons, pour tout* $n \geq 2$*,*

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{Log(n+1)}{Log\ n} \sqrt{\frac{n}{n+1}} x.$$

*Il s'ensuit que la suite* $\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right)_{n\geq 2}$ *tend vers* $x$ *quand* $n$ *tend vers* $+\infty$*.*

La série de terme général $y_n$ est donc convergente lorsque $0 < x < 1$ et divergente lorsque $x > 1$. Elle est aussi divergente pour $x = 1$ car dans ce cas $y_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 3$.

## 2.3 Série absolument convergentes

**Définition 2.3.1** *On dit que* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *est absolument convergente si la série* $\sum_{n\geq 0} |x_n|$ *converge.*

**Remarques 2.3.1** *a) Toute série absolument convergente est convergente. Si* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *est absolument convergente, alors*

$$|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.$$

*b) Une série peut être convergent sans être absolument convergente. Une telle série est dite* **semi-convergente***.*

**Exemple 2.3.1** *La série de terme général* $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ *( c'est un cas de suite alternée )*

**Théorème 2.3.1 ( d'Abel )**
*Soit* $(x_n)_{n\geq 1}$ *une suite telle que* $x_n = \varepsilon_n a_n$. *On suppose*

*i)* $\exists A > 0$ *tel que* $\forall n \geq 1$, $|\sum_{n=1}^{n} a_n| \leq A$.

*ii)* $\sum_{n=1}^{+\infty} |(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})|$ *est convergente ( absolument convergente )*

*iii)* $(\varepsilon_n)_{n\geq 1} \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$, *alors* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *est convergente.*

**Preuve**
Nous allons montrer que la suite des sommes partielles $(s_n)_n$ de la série de terme général $x_n$ est de Cauchy. Effectuons une transformation d' Abel de $s_m - s_n$ pour $n < m$, nous obtenons

$$|s_m - s_n| \leq A[|\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}| + \cdots + |\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m| + |\varepsilon_m|].$$

Donnons-nous un réel $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N_1$ tel que $p \geq N_1$ implique $\varepsilon_p \leq \dfrac{\varepsilon}{3A}$. Il existe un entier $N_2$ tel que $N_2 \leq p < q$ implique $|\varepsilon_{p+1} - \varepsilon_{p+2}| + \cdots + |\varepsilon_q - \varepsilon_{q+1}| \leq \dfrac{\varepsilon}{3A}$. Pour $\max(N_1, N_2) \leq n < m$ nous avons $|s_m - s_n| \leq \varepsilon$. □

**Définition 2.3.2** *On dit qu'une suite* $(x_n)_n$ *de réels est alternée si, pour chaque entier* $n$, *on a* $x_n = (-1)|x_n|$.

**Théorème 2.3.2 (Condition suffisante de convergence pour les séries alternées )**

*Soit* $x_n$ *une suite alternée réels. La série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x_n$ *est convergente si la suite* $(|x_n|)_n$ *est décroissante et converge vers 0.*

**Preuve**
On applique le théorème d'Abel avec $a_n = (-1)^n$ et $\varepsilon_n = |x_n|$. □

**Exemple 2.3.2**

— *La suite* $\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ *vérifie les hypothèses du théorème précédent, la série de terme général* $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *est donc convergente.*

— *La série de terme général* $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$ *est divergente ; néanmoins*

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \qquad (n \to +\infty)$$

*On a ainsi l'exemple de deux suites équivalentes au voisinage de* $+\infty$, *l'une étant le terme général d'une série convergente, l'autre non.*

## 2.4 Multiplication des séries

Nous avons plusieurs manières de définir le produit de deux séries ; chacune d'entre-elles correspondent à un objectif précis. La définition suivante donne l'une des manières.

**Définition 2.4.1** *On appelle série produit de la série de terme général* $x_n$ *et de la série de terme général* $y_n$ *la série de terme général* $w_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$.

**Théorème 2.4.1**
*Si* $\sum_{n\geq 0} x_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} y_n$ *sont absoluments convergentes,* $\sum_{n\geq 0} w_n$ *définit par* $w_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$ *est absolument convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right).$$

**Preuve**
Notons $u_n = \sum_{k=0}^{n} |x_k||y_{n-k}|$ Nous avons, pour un entier $n$ quelconque, $|\omega_n| \leq u_n$ et

$$\sum_{k=0}^{n} |\omega_k| \leq \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{l=0}^{k} |x_l||y_{k-l}|\right] \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|\right) \tag{2.1}$$

d'où la convergence de la série de terme général $u_n$ et la convergence absolue de la série de terme général $\omega_n$.
Etablissons (2.1). Notons $W_n = \sum_{i=0}^{n} \omega_i$, $X_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$, $Y_n = \sum_{i=0}^{n} y_i$ et $U_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$. Nous allons montrer que la suite $(W_n - X_nY_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0.
Notons

$$\begin{aligned} C_n &= \{(i,j); 0 \leq i \leq \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq n\} \\ \Delta_n &= \{(i,j) \in C_n; 0 \leq i+j \leq n\} \end{aligned}$$

Nous avons

$$|W_n - X_nY_n| \leq \sum_{(i,j)\in C_n\setminus\Delta_n} |x_i||y_j| \leq U_{2n} - U_n$$

d'où le résultat car la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. □.

## 2.5 Espaces de suites

**Proposition 2.5.1** $l_p$ *est un espace vectoriel.*

*a) Pour* $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l_p$ *posons*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \qquad \text{lorsque } 1 \leq p < +\infty$$

*et*

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

*b)* $\| \quad \|_p$ *est une norme sur* $l_p$.

**Proposition 2.5.2 (Inégalité de Hölder)**
$x = (x_n)_{n\geq 1} \in l_p$ *et* $y = (y_n)_{n\geq 1} \in l_{p'}$ *où* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y_n\|_{p'}.$$

**N.B. :** *l'inégalité de Cauchy-Schawarz correspond au cas* $p = 2$.

**Proposition 2.5.3 (Inégalité de Minkowski)**
*Soient* $p \geq 1$ *un réel,* $x = (x_n)_{n\geq 1}, y = (y_n)_{n\geq 1} \in l_p$ *alors*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

**N.B. :** Pour chaque réel $p \geq 1$, $\| \quad \|_p$ est une norme sur $l_p$.

Chapitre Trois

# Suites et séries de fonctions

## 3.1 Convergence simple, convergence uniforme pour les suites de fonctions

Soit $A$ un ensemble non vide et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies sur $A$.

**Définition 3.1.1** *a) On dit que la suite $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $A$ si, $\forall x \in A$, la suite $(f_n(x))_n$ converge.*

*b) On dit que la suite $(f_n)_n$ est uniformement convergente sur $A$. S'il existe une fonction $f$ à valeurs réelles ou complexes définie sur $A$ telle que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ et $\forall x \in A$, on a $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.*

**Théorème 3.1.1**
*( Critère de Cauchy )*
*Une suite $(f_n)_n$ de fonctions réelles ou complexe définie sur un ensemble $A$ et uniformement convergente si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall x \in A$ et $\forall p, q$ tels que $N \leq p < q$, on a $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$*

**Preuve**

$\square$.

**Théorème 3.1.2** *On suppose que $(A, d)$ est un espace métrique et que $(f_n)_n$ est une suite de fonctions réelles ou complexes continues qui converge uniformement sur $X$ vers une fonction $f$. Alors $f$ est continue.*

**Preuve**

$\square$.

**Théorème 3.1.3** *Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles ou complexes de classe $\mathcal{C}^{(1)}$. On suppose :*

*i) $\exists x_0 \in ]a, b[$ tel que $(f_n(x_n))_{n\geq 0}$ converge.*

*ii) la suite* $(f_n')_n$ *est uniformément convergente sur* $]a, b[$ *vers une fonction* $g$.

*Alors,* $(f_n)_n$ *converge uniformement sur* $]a, b]$ *vers une fonction* $f$ *qui est de classe* $\mathcal{C}^{(1)}$ *et qui vérifie* $f' = g$.

**Preuve**

$\square$.

**Théorème 3.1.4** *Soient* $-\infty < a < b < +\infty$, $x_0 \in [a, b]$ *et* $(f_n)_{n \geq 0}$ *une suite de fonctions réelles ou complexes continues qui converge uniformement sur* $[a, b]$ *vers* $f$. *On définit*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \ \ et \ \ F_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \ \ sur \ \ [a, b]$$

*Alors,* $\left(F_n(x)\right)_n$ *converge uniformement vers* $F$ *sur* $[a, b]$.

**Preuve**

$\square$.

D'ou la proposition suivante des intégrale dépendant d'un paramètre )

**Proposition 3.1.1** *Soient* $f \ : \ [a, b] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}( \ ou \, \mathbb{C})$. *Alors* $F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$ *est continue*

$$F \ : \ [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}( \ ou \, \mathbb{C})$$

**Définition 3.1.2 Preuve**

$\square$. *On dit que la famille d'intégrales* $\left(\int_a^{+\infty} f(x, t)dx\right)_{t \in T}$ *est uniformement convergente si, et seulement si,* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \geq a$ *tel que* $\forall t \in T$ *et* $\forall x \geq x_0$, *on a*

$$|\int_{x}^{+\infty} f(x, t)dx| \leq \varepsilon.$$

**Théorème 3.1.5** *( Condition suffisante de convergence uniforme d'une famille d'intégrale )*
*S'il existe* $g$ $[a, +\infty[ \to [0, +\infty[$ *dont l'intégrale est convergente et tel que* $\forall t \in T$ *et* $\forall x \geq a$, *on a* $|f(x, t)| \leq g(x)$, *Alors la famille d'intégrales* $\left(\int_a^{+\infty} f(x, t)dx\right)_{t \in T}$ *est uniformement convergente.*

**Preuve**

$\square$.

## 3.2 Série de fonctions

$(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions réelles ou complexes définie sur $A$. Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ telle que $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

**Définition 3.2.1** *On dit que $\sum_{n\geq 1} f_n$ est simplement convergente sur $A$ si la suite $(S_k)_{n\geq 1}$ est simplement convergente.*
*$\sum_{n\geq 1} f_n$ est uniformement convergente sur $A$ si la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est uniformement convergente sur $A$.*

**Définition 3.2.2** *( Critère de Cauchy )*
*$\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformement convergente sur $A$ si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall N \leq n < m$ et $x \in A$, on a $|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| = |S_m - S_n| \leq \varepsilon$.*

**Théorème 3.2.1** *( Condition suffisante pour la convergence uniforme d'une série de fonctions )*
*S'il existe $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in A$, on a $|f_n(x)| \leq a_n$ avec $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergente, alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformement convergente sur $A$.*

**Preuve**

$\square$.

**Théorème 3.2.2** *$A \neq \{\ \}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions contiinues définies sur $A$. Alors, si $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformement convergente, la somme est continue.*

**Preuve**

$\square$.

**Théorème 3.2.3** *$(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}^{(1)}(]a,b[)$ telle que*

*i) $\exists x_0 \in ]a,b[$ tel que $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ converge ;*

*ii) $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformement convergent sur $]a,b[$ et à pour somme une fonction $u$.*

*Alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformement convergente sur $]a,b[$, la somme $S$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{(1)}$ et*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{'} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)^{'}$$

**Preuve**

$\square$.

**Théorème 3.2.4** $(f_n)_n \subset \mathcal{C}^{(1)}([a,b])$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On suppose que* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge uniformement sur* $[a,b]$ *vers une limite* $S$. *Soit* $x_0 \in [a,b]$ *et notons par* $F_n$ *la primitive de* $f_n$ *sur* $[a,b]$ *qui s'annule en* $x_0$. *Alors,* $\sum_{n\geq 0} F_n$ *converge uniformement sur* $[a,b]$ *vers* $\int_{x_0}^{x} S(t)dt$.

**En d'autre terme :**

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)dt\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt\right)$$

*La convergence de la série du second membre étant uniforme sur* $[a,b]$.

**Preuve**

$\square$.

Chapitre Quatre

# Séries entières

On s'intéresse aux séries de fonctions qui sont de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où les $a_n \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$ ( variable ). Ces séries particulières sont appelées **séries entières**.

## 4.1 Rayon de convergence

**Théorème 4.1.1** *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière. Si la série converge pour un nombre complexe* $z_0 \neq 0$*, alors elle est absolument convergente* $\forall z \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $|z| < |z_0|$.

**Preuve**
La suite $(a_n z_0^n)_{n\geq 0}$ convergeant vers 0 est bornée. Il existe donc un réel $K$ tel que pour chaque entier $n$ on a $|a_n z_0^n| \leq K$. Soit alors $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < |z_0|$ ; pour chaque entier $n$ nous pouvons écrire

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n|.|\frac{z}{z_0}|^n \leq K|\frac{z}{z_0}|^n \quad \text{avec} \quad |\frac{z}{z_0}| < 1$$

ce qui implique évidemment la convergence absolue de la série de terme général $a_n z^n$.
$\square$.

**Théorème 4.1.2** *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière.* $\exists R \in [0, +\infty[$*, et un seul, possédant les propriétés suivantes :*

*i)* $\forall z$*, vérifiant* $|z| < R$ *la série est absolument convergente ;*

*ii)* $\forall z$ *vérifiant* $|z| > R$ *la série est divergente.*

**Preuve**
Considérons l'ensemble de réels

$$A = \{|z| \text{ tels que la série } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge}\}$$

Cet ensemble n'est pas vide car $0 \in A$. Si $A$ est majoré nous posons $R = sup\ A$ sinon $R = +\infty$. D'après le lemme d'Abel, le nombre $R$ ainsi défini possède les propriétés requises. Il n'y a pas qu'un nombre $R$ qui possède les propriétés $i)$ et $ii)$. S'il existait un second $R'$ tel que $R < R'$, pour un élément $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $R < |z| < R'$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ serait simultanément convergente et divergente, ce qui est absurde.

□.

**Définition 4.1.1** *1) Étant donnée une série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$*, l'unique nombre* $R$ *vérifiant les conditions i) et ii) du théorème précédant, est appelé* **rayon de convergence de la série** .

*2) Soit la fonction*

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array}$$

*la fonction* $\phi$ *est appelée* **fonction exponentielle**.
*On le note*

$$e^z = \phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

*3) On appelle* **série dérivée** *d'une série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$*, la série entière*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

*Il s'agit de la série entière obtenue en dérivant formellement terme à terme la série donnée.*

**Proposition 4.1.1**
*Soient* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ *deux séries entières dont les rayons de convergence respectifs sont* $R$ *et* $R'$*. Alors*

*i) La série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ *a un rayon de convergence* $\geq min(R, R')$*.*

*ii) La série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) z^n$ *a un rayon de convergence* $\geq min(R, R')$*.*

**Preuve**

□.

**Théorème 4.1.3** *Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

**Preuve**

$\square$.

## 4.2 Propriétés des fonctions définies par une série entière

**Théorème 4.2.1** *Soit $R$ le rayon de convergence d'une série entière*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ...$$

*Alors $\forall \rho \in [0, R[$, la série est uniformement convergeante sur $D(0, \rho)$ ( $D(0, \rho)$ étant le disque ouvert centré en $0$ et de rayon $\rho$ ).*

**Preuve**
La série de terme général $\alpha_n = |a_n|\rho^n$ est clairement convergente. Pour $z \in D(0, \rho)$ et $n$ entier quelconque nous avons $|a_n z^n| \leq \alpha_n$ d'où le résultat d'après le théorème **??**.
$\square$.

**Théorème 4.2.2** *$f$ est continue en chaque point de $D(0, R)$.*

**Preuve**
Etablissons la continuité de $f$ en un point $z_0 \in D(0, R)$. Fixons un réel $\rho$ tel que $|z_0| < \rho < R$. Toutes les fonctions $s_n$ sont continues sur $D_f(0, \rho)$ il s'ensuit d'après la remarque précédente, que la restriction de $f$ à $D(0, \rho)$ est continue. Puisque $z_0$ est un point intérieur de $D_f(0, \rho)$, $f$ est continue en $z_0$ en tant que fonction définie sur $D(0, R)$.
$\square$.

**Théorème 4.2.3** *Soit $g$ la fonction définie $\forall x \in ]-R, R[$ par $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors $g$ est dérivable en chaque point $x \in ]-R, R[$ et*

$$g'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + (n+1)a_{n+1}a_{n+1}x^n + ...$$

*Soit $f\ :\ ]-R, R[ \to \mathbb{C}$ par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$. On a $\forall x \in ]-R, R[,\ \ f(x) = \int_0^x g(t)dt$*

**Preuve**
Il suffit d'appliquer les théorèmes correspondant sur les suites de fonctions dérivables.
$\square$.

**Remarque 4.2.1** *En appliquant succéssivement le théorème précédent à $g'$, $g^{(2)}$, $g^{(3)}$,..., on en déduit que $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et*

$$a_0 = g(0), \quad a_1 = g'(0), \quad ...., \quad a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}, ....$$

**Théorème 4.2.4** *Soient*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n + ... \quad et \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = b_0 + b_1 z + ... + b_n z^n + ...$$

*deux séries entières qui ont pour rayon de convergence respectifs $R > 0$ et $R' > 0$. S'il existe $r$ tel que $0 < r \leq min(R, R')$ tel que $\forall z$ vérifiant $|z| < r$, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

*Alors, pour chaque entier $n \geq 0$, $a_n = b_n$*

**Preuve**
Notons $u$, $v$ les fonctions définies respectivement sur $]-R, R[$ et $]-R, R[$ par

$$u(x) = \sum_{n+0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et coïncident sur l'intervalle $]-r, r[$, on a donc, pour chaque entier $n \geq 0$, $u^{(n)}(0) = v^{(n)}(0)$ d'où le résultat d'après la remarque précédente. En d'autre termes, deux fonctions définies par des séries entières qui coïncident sur un voisinage de 0 sont égales. □.

## 4.3 Application sur la fonction exponentielle réelle et la fonction exponentielle complexe

Exemple

$$\begin{aligned}
chz =& \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ... \\
shz =& \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)} + .... \\
cosz =& \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ... \\
sinz =& \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...
\end{aligned}$$

Chacune des séries considérées a un rayon de convergence égal à $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} ch(z)+sh(z) =& e^z, \\ cos(z)+isin(z) =& e^{iz}, \\ cos(z) =& ch(iz) \\ sin(z) =& \frac{1}{i}sh(it) \end{aligned}$$

## 4.4 Développement en série entière des fonctions usuelles

Soit $f\ :\ V\to\mathbb{R}$ tel que $V\subset\mathbb{R}$.
$\forall a\in V$, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}\subset\mathbb{R}$ et $r>0$ tel que $\forall u$ vérifiant $|a-u|<r$ on a

$$f(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(u-a)^n?$$

**Exemple 4.4.1**

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

*$\forall a\in\mathbb{R}$,*

$$g(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{x-a+a}=\frac{1}{a[1+\frac{x-a}{a}]}$$

*pour $|x-a|<|a|$, on a :*

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-a)^n}{a^{n+1}}$$

*On prend $r=|a|$.*

**Remarque 4.4.1** *Les fonctions qui admettent un développement en série entières sont nécessairement de calsse $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et pour chaque entier $n\geq 0$, $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

**Définition 4.4.1** *Etant donnée une fonction $f$ définie sur un voisinage de 0 et de classe $\mathcal{C}^\infty$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est appelée la série de Mac Laurin de $f$.*

**Remarque 4.4.2** *Soit $f\in\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0. Existe-t-il un réel $r>0$ tel que la série de Marc Laurin de $f$ converge sur l'intervalle $]-r,r[$ ?*
*On montre qu'il existe :*

*i) des fonctions $f$ dont le rayon de convergence de la série de Marc Laurin est égal à 0.*

*ii) des fonctions dont le rayon de convergence de la série de Marc Laurin est $> 0$ ; la fonction égale à la somme de la série de Marc Laurin étant différente de $f$.*

**Exemple 4.4.2** *Les rayons de convergeance des séries suivantes sont tous égals à $+\infty$.*

$$
\begin{aligned}
e^x =& 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \\
a^x =& e^{xloga} = 1 + \frac{loga}{1!}x + \frac{(loga)^2}{2!}x^2 + ... + \frac{(loga)^n}{n!}x^n + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(loga)^k}{k!}x^k \\
chx =& 1 + \frac{x^1}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + ... = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)} \\
shx =& x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + ... = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\
sinx =& x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + ... = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\
cosx =& 1 - \frac{x^1}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + ... = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)}
\end{aligned}
$$

**Exemple 4.4.3**

$$
\begin{array}{rcccl}
f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\
& & x & \mapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si \quad x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & si \quad x > 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

*$f \in \mathcal{C}^{(\infty)}$ et $f^{(n)}(0)$, $\forall n \geq 0$.*
*La série de Marc Laurin de $f$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$. D'autre part, la somme de cette série de Marc Laurin est la fonction égale à $0$ qui est différente de $f$.*

**Théorème 4.4.1** *(Formule de Taylor avec reste intégral )*
*Soit $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbb{C}^{(n+1)}$. Alors*

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

**Preuve**
On démontre le résultat par récurrence sur l'entier $n$. La formule est vraie lorsque $n = 0$ car, la fonction $f$ étant de classe $\mathcal{C}^{(1)}$ on a

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

Suppons que la formule soit vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons qu'elle est encore vraie pour l'entier $n+1$. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$. Elle est en particulier de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ ; nous pouvons alors écrire

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

La fonction $f^{(n+1)}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, nous pouvons transformer le terme complementaire par une intégration par parties en posant $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $u'(t) = \frac{(b-t)^n}{n!}$. Nous obtenons alors

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt.$$

Ce qui conduit à la formule voulue. $\square$

La formule de taylor permet de donner une condition suffisante pour qu'une fonction possède un développement en série entière.

**Théorème 4.4.2** *Soient $r > 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty$ tel que $f \ : ]-r, r[\to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq 0$ et $\forall x \in ]-r, r[$, on a $|f^{(n)}(x)| \leq M$ alors la série de Marc Laurin de $f$ converge uniformement vers $f$ sur $]-r, r[$.*

**Preuve**

Soit $x \in ]r, r[$ ; d'après la formule de Taylor avec reste intégral nous pouvons écrire, pour chaque entier $n$,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

avec

$$R_n(x) \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

Nous avons alors

$$|R_n(x)| \leq |\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt| \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}M$$

puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}M = 0$ le résultat en découle. $\square$

<u>Rappel de quelques resultats connus</u>

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + ... + x^n + .... = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + ... = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k
\end{aligned}$$

Ces séries $\sum_{k=0}^{+\infty} x^n$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ convergent uniformement sur tout intervalle $]-\rho, \rho[$ avec $0 < \rho < 1$.
On en déduit en remplaçant $x$ par $x^2$ ; ce qui nous donne les développements suivants :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2} &= 1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n} + .... = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} \\ \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^n x^{2n} + ... = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}\end{aligned}$$

Les série suivantes $\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$ convergent uniformement sur tout intervalle $[-\rho, \rho]$ avec $0 < \rho < 1$.

**Théorème 4.4.3** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série entière*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + ... \tag{4.1}$$

*converge uniformement vers la fonction $(1+x)^\alpha$ sur chaque intervalle $[-\rho, \rho]$ tel que $0 \leq \rho < 1$.*

**Preuve**
Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on obtient le résultat par développemnt de $(1+x)^\alpha$ en utilisant la formule du binôme. Supponsons que $\alpha \notin \mathbb{N}$.
Fixons un réel $\rho \in [0, 1]$. Nous savons que la série (**??**) a un rayon de convergence égal à 1.
Notons $f$ la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^\alpha$. Cette fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^{(\infty)}$ et, pour chaque entier $\neq \geq 1$, nous avons

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \\ f^{(n)}(t)(0) &= (\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1).\end{aligned}$$

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée entre 0 et $x$ ($|x| < 1$) donne

$$(1-x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x)$$

avec
□

**Exemple 4.4.4**

- $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4....2n}x^n + ...$
- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + ... + (-1)^n \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}x^{2n} + ...$
- $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + ... + \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}x^{2n} + ...$
- *pour* $|x| < 1$, *on a* : $log(1+x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+t}$

$$log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$$

- *pour* $|x| < 1$, *on a* $Arcsinx = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$\Rightarrow Arcsinx = x + \frac{x^2}{2.3} + ... + \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $Arctgx = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, *on a donc pour* $|x| < 1$,

$$Arctgx = x - \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

*toutes les séries qui sont au second membre convergent uniformement sur tout intervalle* $[-\rho, \rho]$ *avec* $0 < \rho < 1$.

Chapitre Cinq

# Séries de Fourier

## 5.1 Rappels et calculs préliminaires

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On rappelle les égalitées suivantes :

$$\begin{aligned}
cosx.cosy =& \frac{1}{2}\left[cos(x+y) + cos(x-y)\right] \\
sinx.siny =& \frac{1}{2}\left[cos(x-y) - cos(x+y)\right] \\
sinx.cosy =& \frac{1}{2}\left[sin(x+y) + sin(x-y)\right]
\end{aligned}$$

De ces trois égalités, on en déduit les intégrales suivantes :

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(px).cos(qx) = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad p = q = 0 \\ \pi & \text{si} \quad p = q \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad p \neq q \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} sin(px).sin(qx) =& \begin{cases} \pi & \text{si} \quad p = q \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad p \neq q \text{ ou bien si} \quad p = q = 0 \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} sin(px).cos(qx) =& 0
\end{aligned}$$

Nous donnons d'autres égalités utililes pour ce chapitre

$$R_m(x) = 1 + e^{ix} + e^{2ix} + ... + e^{imx} = \begin{cases} e^{\frac{imx}{2}} \frac{sin\frac{m+1}{2}}{sin\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x \neq 2kx. \\ m+1 & \text{si} \quad x = 2kx \end{cases}$$

$$S_m(x) = 1 + cosx + cos2x + ... + cosmx = \begin{cases} cos\frac{mx}{2} \frac{sin\frac{m+1}{2}x}{sin\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x \neq 2k\pi. \\ m+1 & \text{si} \quad x = 2k\pi. \end{cases}$$

$$T_m(x) = sinx + sin2x + ... + sinmx = \begin{cases} sin\frac{mx}{2} \frac{sin\frac{m+1}{2}x}{sin\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x \neq 2k\pi. \\ 0 & \text{si} \quad x = 2k\pi. \end{cases}$$

$$D_m(x) = S_m - \frac{1}{2} = \begin{cases} sin\frac{(m+\frac{1}{2})x}{2sin\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x \neq 2k\pi. \\ m+\frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 2k\pi. \end{cases}$$

$$K_m(x) = \frac{1}{m}[D_0(x) + ... + D_{m-1}(x)] = \begin{cases} \frac{1}{2m}[\frac{sin\frac{mx}{2}}{sin\frac{x}{2}}]^2 & \text{si} \quad x \neq 2kpi. \\ \frac{m}{2} & \text{si} \quad x = 2k\pi \end{cases}$$

## 5.2 Applications périodiques

**Définition 5.2.1** *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}(ou\,\mathbb{R})$ est périodique de période $T \in \mathbb{R}$ (on dit aussi $T$-périodique) si, $\forall x \in \mathbb{C}(ou\,\mathbb{R})$, on a $f(x+T) = f(x)$.*

Remarqons que l'ensemble des fonctions $T$-périodiques est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

**Exemple 5.2.1** *Les fonctions $x \mapsto sin\ x$ et $x \mapsto cos\ x$ sont $2\pi$-périodiques (ici $T = 2\pi$) ; la fonction $x \mapsto e^{ix/T}$ est $(2\pi/T)$-périodique.*

N.B. : Une fonction définie sur un intervalle de longueur $T$ peut bien sur être identifiée à une fonction $T$-périodique.

On utilise constament la propriété élémentaire suivante.

**Proposition 5.2.1** *Soit $f$ une application $T$-périodique. Si $f$ est $T$-périodique et continue par morceau sur $[0, T]$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $f$ est continue par morceau sur $[x_0, x_0+T]$ et l'on a*

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

## 5.3 Séries trigonométriques

**Définition 5.3.1** *Une série de fonctions de terme général $f_n$ est appélée série trigonométrique, lorsqu'il existe deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels, telles que $f_0(t) = a_0/2$ pour tout $t$ et, $\forall n \geq 1$ et tout $t$, on a*

$$f_n(t) = a_n cos(nt) + b_n sin(nt).$$

*En d'autres mots, la série est de la forme*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nt) + b_n sin(nt))$$

On écrit souvent la série trigonométriques sous forme exponenetielle. Posons :

$$c_0 = a_0/2 \text{ et } \forall n \geq 1, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{et} \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

On obtient

$$f_n(t) = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}$$

qui conduit, au moins formellement, à l'écriture :

$$\sum_{n \geq 0} f_n(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}.$$

Réciproquement il est clair qu'une série de fonctions du type $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$ est une série trigonométrique, avec $a_0 = 2c_0$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Le lecteur devra pourtant prendre garde à cette notation dont l'interprétation précise fait l'objet de la définition suivante.

**Définition 5.3.2** *On appelle, pour $p \in \mathbb{N}$, $p$-ième somme partielle de la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$S_p = \sum_{n=-p}^{n=p} c_n e^{int}$$

*On dira que la série est convergente (simplement, uniformément) lorsque la suite de fonctions $(S_p)$ converge (simplement, uniformtement). On dira que la série converge normalement si la série de fonctions $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$ converge normalement.*

Lorsque les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent, i.e. lorsque les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ sont absolument convergentes, on voit que la série trigonométrique correspondante converge normalement. La fonction somme est alors (d'après le résultat général sur les séries de fonctions) une fonction continue et $2\pi$-périodique.

**Proposition 5.3.1**
*L'ensemble $\mathcal{D}$ des points où la série trigonométrique converge simplement est invariant sous l'effet de la translation $t \mapsto t + 2\pi$, et la fonction somme $S$ est $2\pi$-périodique. Si la série converge normalement sur un intervalle $I$ de $\mathcal{D}$, la fonction $S$ est continue sur $I$. C'est notamment le cas lorsque les séries de termes généraux $a_n$ et $b_n$ sont absolument convergentes.*

**Remarques 5.3.1**
*Si les séries* $\sum |a_n|$ *et* $\sum |b_n|$ *convergent,*

- ⋆ *La série* $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k coskx$ *converge pour chaque réel* $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
- ⋆ *La série* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k sinkx$ *converge* $\forall x \in \mathbb{R}$.
- ⋆ *Lorsque la série à terme général* $|a_n| + |b_n|$ *converge, la série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k coskx + b_k sinkx)$$

*est uniformement convergente sur* $\mathbb{R}$.
- ⋆ *Lorsque* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^k(|a_n| + |b_n|)$ *converge, la fonction égale à la somme de la série est de classe* $\mathcal{C}^k$

**Proposition 5.3.2** *Soit* $\displaystyle\sum_{n\in\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ *une série trigonométrique normalement convergente sur* $[-\pi, \pi]$ *et* $S(t)$ *sa fonction somme. Alors la fonction* $S(t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et l'on a, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(t)e^{-int}dt.$$

*Si de plus la série trigonométrique* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} S(t)e^{-int}$ *des dérivées est normalement convergente, de somme* $S_1$*, la fonction* $S$ *est dérivable avec* $S' = S_1$.

**Preuve**
La fonction somme $S$ est continue par la théorie générale et $2\pi$-périodique. De plus on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(t)e^{-ipt}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t}dt.$$

On utilise alors le lemme suivant

**Lemme 5.3.1** *Soit* $k$ *un entier relatif et* $I(k) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt$. *On a*

$$I(k) = \begin{cases} 0 & si \quad k \neq 0 \\ 2\pi & si \quad k = 0 \end{cases}$$

La dérivation de $S$ est directement donnée par le théorème de dérivation des séries de fonctions. □

## 5.4 Séries de Fourier

Pour faciliter les notation, on suppose que toutes les fonctions sont $2\pi$-périodiques, c'est-à-dire que $T = 2\pi$. Si nous avons une fonction $T$-périodique (avec $T \neq 2\pi$), l'ensemble des définitions et résultats de ce chapitre s'applique s'appliquera aux fonctions $T$-périodiques, à condition de remplacer à chaque fois les fonctions $2\pi$-périodiques $t \mapsto cos(nt)$, $t \mapsto sin(nt)$ et $t \mapsto e^{int}$ respectivement par les fonctions $t \mapsto cos(2\pi nt/T)$, $t \mapsto sin(2\pi nt/T)$ et $t \mapsto e^{2i\pi nt/T}$ qui sont $T$-périodiques. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $2\pi$-périodiques et continues par morceaux sur chaque période. $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$( ou sur $\mathbb{R}$ si on se limite aux fonctions à valeurs réelles).

### 5.4.1 Coefficients de Fourier

**Définition 5.4.1** *Soit $f$ une fonction $2\pi$-périodique et continue par morceau sur $[-\pi, \pi]$. On appelle coefficients de Fourier exponenetiels de $f$ les nombres complexes $c_n$ définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

*Les coefficients de Fourier trigonométriques sont les nombres définis par*

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(nt)dt, \quad pour\ n > 1, \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)sin(nt)dt, \quad pour\ n > 1. \end{aligned}$$

*On convient parfois de prendre aussi que $b_0(f) = 0$, pour faciliter l'écriture de certaines formules.*

**Exercice 5.4.1**

1. *Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $2\pi$-périodique $f$ définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x^2$.*
2. *Soit $f$ une fonction de $\mathcal{E}$ et $g$ la fonction de $\mathcal{E}$ définie par $g(t) = f(t + a)$ où $a$ est un réel fixé. Calculer les coefficients de Fourier de $g$ en fonction de ceux de $f$.*

**Remarques 5.4.1**

*Si $S$ est la somme d'une série trigonométrique $\sum c_n e^{int}$ normalement convergente, les coefficients de Fourier trigonométriques de $S$ sont les $c_n$.*

*On donne ci-dessous quelques propriétés simples de ces coéfficients de Fourier.*

1. *La valeur moyenne de $f$ sur une période est égale à $a_0$.*
2. *Dans chacune des définitions ci-dessus, l'intervalle $[-\pi, \pi]$ peut être remplacé par n'importe quel intervalle de longueur $2\pi$.*

3. *Si $f$ est une fonction à valeurs réelles, $a_n$ et $b_n$ sont réels et $c_n = c_{-n}$ pour tout $n$.*
4. *Si $f$ est une fonction paire, alors $\forall n \geq 1,\ b_n(f) = 0$.*
5. *Si $f$ est impaire, alors $\forall n \geq 0,\ a_n(f) = 0$.*
6. *On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les relations $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ et $c_n = (a_n - ib_n)/2$, $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$.*
7. *L'application $\mathcal{E} \ni f \mapsto c_n(f) \in \mathbb{C}$ est linéaire :*
$$c_n(\lambda.f + \mu.g) = \lambda.c_n(f) + \mu.c_n(g).$$
8. *On a l'estimation suivant :*
$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt.$$
9. *pour $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire*
$$\begin{aligned}
s(f)(x) =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\frac{1}{2} + costcosx + sintsinx + ... + cos\ ntcos\ nx + sin\ ntcos\ nx]dt \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\frac{1}{2} + cos(t-x) + ... + cos\ n(t-x)]dt \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)]D_n(t)dt.
\end{aligned}$$

La propriété suivante porte le nom de lemme de Riemann-Lebesgue.

**Proposition 5.4.1** *Soit $f$ une fonction de $\mathcal{E}$. Les suites $(a_n(f))$, $(b_n(f))$, $(c_n(f))$ et $(c_{-n}(f))$ $(n \in \mathbb{N})$ des coefficients de Fourier de $f$ sont convergentes et ont pour limite 0.*

Cette propriété ci-dessous montre que deux fonctions continues et distinctes ne peuvent avoir les mêmes coefficients de Fourier car il existerait un point où la différence de ces deux fonctions serait continues et non nulles.

**Proposition 5.4.2** *Soit $f$ une fonction continue par morceaux et périodique. S'il existe un point $c \in [-\pi, \pi]$ tel que $f(c) \neq 0$ et $f$ soit continue en $c$, alors les coefficients de Fourier de $f$ ne sont pas identiquement nuls.*

### 5.4.2 Séries de Fourier. Cas des fonctions régulières

Nous venons de définir les coefficients de Fourier d'une fonction périodique $f$ dont nous avons seulement supposé qu'elle était continue par morceaux. On a la définition suivante :

**Définition 5.4.2** *La série trigonométrique*

$$s(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}[a_k(f)cos\ kx + b_k sin\ kx]$$

*est appelée* **série de Fourier de** $f$.

**Exemple 5.4.1**

*La fonction* $\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto \dfrac{\pi - x}{2} \end{array}$ *est* $2\pi$*-périodique sur* $[0, 2\pi]$. $f \in \mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* $[0, 2\pi]$. *on a* $a_n = 0$ *et* $b_n = \frac{1}{n}$, $\forall n$.

*Alors* $s(f) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin\ nx}{n}$.

Nous nous intéressons maintenant a la série trigonométrique dont les coefficients sont les $c_n(f)$ et que l'on appelle série de Fourier de $f$. La question naturelle est de savoir si cette série trigonométrique converge et dans ce cas si sa fonction somme est $f$. La question naturelle est de savoir si cette série trigonométrique converge et dans ce cas si sa fonction somme est $f$. Par contre, et c'est l'objet de ce paragraphe, on peut voir assez facilement que c'est bien le cas pour les fonctions périodiques qui sont suffisamment régulières, c'est à dire plusieurs fois dérivables. On a cette premier résultas :

**Proposition 5.4.3** *Soit* $k$ *un entier strictement positif,* $f$ *une fonction* $2\pi$*-périodique,* $(c_n(f))$ *la suite des coefficients de Fourier exponentiels de* $f$. *Si* $f$ *est* $k$ *fois continument dérivable sur* $\mathbb{R}$, *alors il existe un réel* $M > 0$ *tel que pour, tout* $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$, *on ait*

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^k}.$$

**Preuve**

Supposons que $f$ est continument dérivable. En intégrant par parties et puisque $f(2\pi) = f(0)$, on obtient :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{in}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt,$$

et donc :

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{|n|} sup\{|f'(t)|, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Dans le cas d'une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k > 1$, il suffit de montrer par récurrence de la même manière que :

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^k}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)e^{-int}dt,$$

de sorte que

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{|n|^k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(k)}(t)dt.$$

On peut prendre $M = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(k)}(t)|dt$ ou $M = \sup_t |f^{(k)}(t)|$. $\square$

On en déduit la proposition suivante

**Proposition 5.4.4** *Si $f$ est une fonction $2\pi$-périodique de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ avec $k \geq 2$, alors la série de Fourier de $f$ est normalement convergente et sa somme est $f$.*

**Preuve**

Puisque l'on a $|c_n(f)| \leq M/n^2$, la série trigonométrique $\sum c_n(f)e^{int}$ est normalement convergente. On a vu que les coefficients de Fourier de la fonction somme $S$ sont alors égaux à ceux de la fonction $f$. Puisque $f$ et $S$ sont continues, la proposition 5.4.2 entraine l'égalité $f = S$. $\square$

**N.B. :** La Proposition 5.4.4 dit que toute fonction $f(t)$ $2\pi$-périodique suffisamment régulière peut s'écrire (à une constante près) comme superposition d'harmoniques, c'est à dire de fonctions de la forme $a_k cos(kx)$ et $b_k sin(kx)$. Ces fonctions ont $T = 2\pi/k$ pour période, et pour fréquence $\nu = 1/T = k/2\pi$. Le spectre du signal $f(t)$ est alors l'ensemble des entiers $k$ pour lesquels $c_k \neq 0$, et l'énergie du signal à la fréquence $k/2\pi$ est par définition le nombre réel positif.

$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

**Exercice 5.4.2** *Soit $f$ la fonction paire et $2\pi$-périodique définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques et montrer l'égalité*

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}.$$

### 5.4.3 Convergence au sens de Cesaro

On rappelle que lorsqu'une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de réels converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors la suite des moyennes $\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ est convergent vers $l$.

Cependant, la suite des moyennes peut être convergentes sans que la suite initiale converge. Exemple :$((-1)^n)_{n\geq 1}$.

**Définition 5.4.3** *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge au sens de Cesaro lorsque la suite des moyennes $\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ est convergentes.*

*Soit $f$ une fonction $2\pi$-périodique et continue par morceau sur $[0, 2\pi]$.*

$\forall m = 1, 2, ...$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}\sigma_m(f)(x) =& \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} s_k(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)[\frac{D_0(t) + ... + D_{m-1}(t)}{m}]dt \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_m(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)]K_m(t)dt\end{aligned}$$

**Théorème 5.4.1** *Soit* $f$ *une fonction* $2\pi$*-périodique de* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *qui est, de plus, continuue par morceaux sur* $]-\pi, \pi[$

$\forall x \in \mathbb{R}$, *la suite* $(\sigma_m(f)(x))_{m\geq 1}$ *converge vers* $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$.

### 5.4.4 Théorème de convergence simple de Dirichlet

On dira qu'une fonction $f$ continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ est continument dérivable par morceaux (on dit aussi $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur cet intervalle s'il existe une partition de $[0, 2\pi[$ constituée d'un nombre fini d'intervalles $[a_j, b_j[$ tels que $f$ est dans chacun de ces intervalles $]a_j, b_j[$ la restriction à $]a_j, b_j[$ d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_j, b_j]$.

**Théorème 5.4.2 (Théorème de Dirichlet)** *Soit* $f$ *une fonction* $(2\pi)$*-périodique, continûment dérivable par morceaux et* $x_0 \in [0, 2\pi]$. *Alors la série de Fourier de* $f$ *converge simplement en* $x_0$ *et sa somme est*

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

*où* $f(x_0^+)$ *et* $f(x_0^-)$ *sont les limites à droite et à gauche de* $f$ *en* $x_0$. *Si de plus* $f$ *est continue en* $x_0$, *sa série de Fourier converge simplement en* $x_0$ *vers* $f(x_0)$.

### 5.4.5 Convergence de $s(f)$

**Lemme 5.4.1** *Si* $f \in \mathcal{C}^{(1)}$ *par morceaux définie sur l'intervalle* $[a, b]$ *alors il existe* $A \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall n \geq 1, \quad |\int_a^b f(t)cos\, ntdt| \leq \frac{A}{n} \quad et \quad |\int_a^b f(t)sin\, ntdt| \leq \frac{A}{n}$$

**Théorème 5.4.3** *(de Hardy )*
*Soit* $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ *(ou*$\mathbb{C}$*). On suppose qu'il existe* $A \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a* $|x_n| \leq \frac{A}{n}$.
*On note ,* $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned}s_n =& x_1 + .... + x_n \quad pour \quad n \geq 0 \\ \sigma_n =& \frac{s_1 + ... + s_n}{n} \quad pour \quad n \geq 1\end{aligned}$$

*Alors, si la suite* $(\sigma_n)_n$ *converge vers un réels* $s$, *la suite* $(s_n)_n$ *converge aussi vers* $s$.

### 5.4.6 Convergence en moyenne d'ordre 2 ( Formule de Parseval)

**Théorème 5.4.4** *Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $2\pi$-périodique et continue par morceau sur $[-\pi, \pi]$. Alors*

*1)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-s_n(f)|^2dx = 0$ *(converge en moyenne d'ordre 2) ;*

*ii)* $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)$ *( formule de Parseval ).*

**Exemple 5.4.2** *La formule de Parseval, appliquée à la fonction $2\pi$-périodique $f$ égale à $\frac{\pi-x}{2}$ sur $[0, 2\pi]$, donne*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\pi-x)^2}{4}dx = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$$

**Exemple 5.4.3** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi$-périodique égale à $1-\frac{x^2}{\pi}$ sur $[-\pi, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de $f$. En déduire les valeurs de :*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\ ;\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}\ ;\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$$

**Solution**

*$f$ est paire $\Rightarrow \forall n\ \ b_n(f) = 0$ par ailleurs, $a_0 = a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\frac{t^2}{\pi^2})dt = \frac{4}{3}$ et*

$$\forall n \geq 1,\ \ a_n = a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\frac{t^2}{\pi^2})cos\ ntdt = \frac{-2}{\pi^3}\int_0^{\pi}t^2cos\ ntdt$$

$a_n = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}$ *( après une double intégration ).*
*La fonction $f$ est continue de classe $\mathcal{C}^{(1)}$ par morceaux. Sa série de Fourier converge simplement ( et même uniformement ) vers $f$. Ce qui s'écrit*

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ \ f(x) = 1-\frac{x^2}{\pi^2} = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_ncos\ nx = \frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}cos\ nx$$

- *si $x = \pi$, on a : $0 = \frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ;*
- *si $x = 0$, on a : $1 = \frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2} \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$*

*donc*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{1}{2}[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}]\\ &= \frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{12}) = \frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

*D'après l'égalité de Parseval, on a :*

$$\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}=\frac{8}{15},\quad donc\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx=\pi[\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)]$$

# Deuxième partie

# Travaux dirigés et Anciens sujets d'Examen

Chapitre Six

# Travaux Dirigés

## TRAVAUX DIRIGÉS $N^\circ$ 1 de D'ANALYSE 3

**Exercice 6.0.1** *Convergence et calcul des intégrales suivantes.*

$$(i) \int_0^{+\infty} e^{-x}dx. \qquad (iv) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x}. \qquad (vii) \int_0^{+\infty} \frac{e^{arctan\ x}}{1+x^2}dx.$$
$$(ii) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}. \qquad (v) \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx. \qquad (viii) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}.$$
$$(iii) \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \qquad (vi) \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx. \qquad (ix) \int_0^{\pi/2} \frac{cos\ x}{\sqrt{sin\ x}}.$$

*On rappelle que* $\lim_{A\to+\infty} arctanA = \frac{\pi}{2}$ *et* $\lim_{A\to-\infty} arctanA = -\frac{\pi}{2}$.

**Exercice 6.0.2** *Déterminer la nature des intégrales suivantes. On pourra chercher leur primitifs.*

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}. \qquad (ii) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \qquad (iii) \int_0^{+\infty} e^{x}dx. \qquad (iv) \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x(x+2)}.$$

**Exercice 6.0.3** *Déterminer la nature des intégrales suivantes. On pourra comparer à des intégrales de références.*

$$(i) \int_1^{+\infty} \frac{1-cos\ x}{x^2}dx. \qquad (iii) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^{17/5}}dx. \qquad (v) \int_0^{1} \frac{e^x}{x}dx.$$
$$(ii) \int_0^{1} \frac{cos\ x}{\sqrt{x}}dx. \qquad (iv) \int_0^{1} \frac{x^2+1}{x}dx. \qquad (vi) \int_{-\infty}^{1} \frac{e^{cos\ x}}{x}dx.$$

**Exercice 6.0.4**

*(i)* *Montrer que* $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ *converge.*

*(ii)* *En faisant le changement de variable* $x = tan\theta$, *calculer l'intégrale précedente. On rappelle que* $sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-cos(2\theta))$ *et* $\lim_{A\to+\infty} arctanA = \frac{\pi}{2}$.

## Exercice 6.0.5

*(i)* *Montrer que* $\int_2^{+\infty} \frac{4x}{x^4-1}dx$ *converge.*

*(ii)* *Vérifier que*

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{-2x}{x^2+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

*(iii)* *En déduire la valeur de l'intégrale.*

## TRAVAUX DIRIGÉS $N^\circ$ 2 de D'ANALYSE 3
## (Séries Numériques et Suites et séries de fonctions)

**Exercice 6.0.1** *Étudier les séries de terme général :*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $u_n = 1 - \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{n}} dx$ | 6. | $z_n = \frac{n+cos\ n}{e^n + sin\ n}$ |
| 2. | $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{sin^3\ x}{1+x}$ | 7. | $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} sin(\frac{\pi}{n})$ |
| 3. | $w_n = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ | 8. | $b_n = \frac{sin\ n}{n\sqrt{n}}$ |
| 4. | $x_n = ln(1+\frac{1}{n})$ | 9. | $c_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} cos\ tdt$ |
| 5. | $y_n = \frac{n^n}{(2n)!}$ | 10. | $d_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ |

**Exercice 6.0.2** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose, pour $n \geq 1$,*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^2+k)^\alpha}.$$

*Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.*

**Exercice 6.0.3** *Nature et somme des séries suivantes :*

$$1.\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+3n}{n} \qquad 2.\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+2^n}{n!} \qquad 3.\ \sum_{n\geq 1} ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right].$$

**Exercice 6.0.4**

1. *Décompososer en éléments simples la fraction $\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$.*
2. *Sommer la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+2^2+...+n^2}$.*

**Exercice 6.0.5**
*Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :*

*a)* $f_n(x) = x^n$, *pour* $x \in [0,1]$.

*b)* $f_n(x) = x^n$, *pour* $x \in [0,a]$ *avec* $a < 1$, *pour* $x \in [0,1[$

*c)* $f_n(x) = x^n(1-x)$, *pour* $x \in [0,1]$.

*d)* $f_n(x) = \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$, *pour* $x \in [0,1]$.

*e)* $f_n(x) = e^{-nx} sin(nx)$ *pour* $x \in \mathbb{R}_+$, *pour* $x \in [a, +\infty]$ (*avec*; $a > 0$).

*f)* $f_n(x) = nx$, *pour* $x \in [0, \frac{1}{n}[$, $f_n(x) = \frac{n(x-1)}{1-n}$, *pour* $x \in [\frac{1}{n}, 1]$

**Exercice 6.0.6**
*Soit $n > 1$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f_n(t) = e^t - (1+\frac{t}{n})^n \quad si \quad t > -n, \quad f_n(t) = e^t \quad si \quad t \leq -n.$$

*a) Montrer que la restriction de* $f_n$ *à* $[0, +\infty[$ *est croissante. En déduire que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers* $0$ *sur tout intervalle* $[0, a]$ *avec* $a > 0$.

*b) Montrer que la restriction de* $f_n$ *à* $]-\infty, 0[$ *est positive, atteint son maximum en un point* $x_n$ *et que la suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *admet* $-2$ *pour limite.*

*c) En déduire que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément sur* $]-\infty, 0[$.

**Exercice 6.0.7**
*Fonction définie par une série*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(arctan(x+n) - arctan(n))$$

*1) Étudier la convergence simple, uniforme, de* $f$

*2) Montrer que* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^{(1)}$ *sur* $\mathbb{R}$.

*3) Chercher une relation simple entre* $f(x)$ *et* $f(x+1)$.

*4) Trouver* $lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**Exercice 6.0.8** *Convergence de* $f^{(n)}$
*Soit* $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$. *On définit la suite* $(f_n)_{n\geq Nset}$ *par* $f_n = f^{(n)}$ *(dérivée n-ème). On suppose que* $(f_n)_{n>1}$ *converge uniformément vers* $\varphi$. *Que peut-on dire de* $\varphi$ *?*

**Exercice 6.0.9** $\sum sin(n)/n$
*Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in [-1, 1]$ *on pose* $u_n(x) = \frac{x^n sin(nx)}{n}$.

*1) Montrer que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *converge uniformément sur* $[-1, 1]$ *vers une fonction continue,* $f$.

*2) Justifier la dérivabilité de* $f$ *sur* $]-1, 1[$ *et calculer* $f'(x)$. *En déduire* $f(x)$.

*3) En déduire la valeur de* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\ n}{n}$.

## TRAVAUX DIRIGÉS $N^\circ$ 3 de D'ANALYSE 3
## (Séries entières et séries de Fouriers)

**Exercice 6.0.1** *Calculer les rayons de convergence $R$ et les somme des séries entières suivantes*

$$a)\ \sum_{n\geq 0} n^2x^n \qquad c)\ \sum_{n\geq 2}\frac{n}{n^2-1}x^n$$
$$b)\ \sum_{n\geq 0}\frac{x^{3n+1}}{3n+1} \qquad d)\ \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n(n+1)}$$

*Etudier ces séries en $x = R$ et $x = -R$.*

**Exercice 6.0.2** *Calculer la somme de la série entière de terme général $u_n(x) = \frac{x^n}{n} cox\frac{2n\pi}{3}$.*

**Exercice 6.0.3** *Dévélopper en série entière la fonction $f\ :\mapsto ln(x^2+2x+4)$.*

**Exercice 6.0.4** *Déterminer une série entière solution de*

$$\begin{cases} y" + xy & = x^2+x+2 \\ y(0)=1 & y'(0)=1 \end{cases}$$

**Exercice 6.0.5** *Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}e^{-nx}}{n}$*

*1) Montrer que $S$ est continue sur $[0,+\infty[$*

*2) Montrer que $S$ est dérivable sur $[0,+\infty[$*

*3) Calculer $S'(x)$ sur $[0,+\infty[$ et en déduire $S(x)$*

**Exercice 6.0.6**

*1) Déterminer une série entière solution de l'équation différentielle*

$$\begin{cases} xy" - y = & x^2+x-1 \\ y(0)=1, & y'(0)=1 \end{cases}$$

*2) Sur l'intervalle $[-A, A]$, établir une majoration du reste d'ordre $N$ de la série, majoration indépendante de $x$.*

**Exercice 6.0.7** *Dévélopper en série de Fourier la fonction $2\pi$-périodique impaire definie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$*
*En déduire $A = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ $B = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$*

**Exercice 6.0.8** *Développer en série de Fourier la fonction $2\pi$-périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x) = x^2$*
*En déduire $A = \sum_{n=1}^{+\infty}$ , $B = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1)^{n-1}}{n^2}$, $C = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, $D = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ et $E = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$*

**Exercice 6.0.9** *Développer en série de Fourier la fonction $2\pi$-périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(x)=|sin\ x|$*
*En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.*

**Exercice 6.0.10** *Soit $f$ de période $2\pi$ telle que $f(x)=x^2+\pi x$ sur $]-\pi,\pi[$*

1) *Former le développement en série de Fourier trigonométrique de $f$ ainsi que la formule de Parsevale pour $f$*
   *En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ puis $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$*
2) *Déduire le dévéloppement de $F$ de période $2\pi$ telle que $F(x)=\int_0^x f(t)dt$*
   *En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$.*

**Exercice 6.0.11** *Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $f$ de de période $2\pi$ telle que $f(x)=cos\frac{x}{2}+sin\frac{x}{x}$*
*En déduire la valeur de la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$*

**Exercice 6.0.12** *Soit $f$ la fonction de période $2\pi$ telle que*

$$f(x)=\begin{cases} -\pi x & sur \quad ]-\pi,0[ \\ x^2 & sur \quad ]0,\pi[ \end{cases}$$

*et soit $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos\ nx+b_n sin\ nx)$ son développement en série de Fourier.*

1) *Déterminer en fonction de $a_n$ et $b_n$ les coefficients des développements en série de Fourier de $f'$, $f"$ et $f^{'"}$*
2) *En déduire pour $n>0$ les valeurs de $a_n$ et $b_n$*
3) *A partir du développement en série de Fourier de $f'$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$*
4) *A partier du dévéloppement en série de Fourier de $f$ calculer $a_0$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$*
5) *Déduire du développement en série de Fourier de $f'$ la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.*

# Bibliographie

[1] D. GUININ, F. AUBONNET, B. JOPPIN. Analyse 2 : Classes Préparatoires. Premier cycle Universitaire. Précis de Mathématiques. Tome 4.(3$^e$ édition) Bréal 1993.

[2]

[3]